Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 613784 14 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	c
2	b
3	c
4	d
5	a
6	a
7	d
8	d
9	b
10	c
11	d
12	b

1. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$

(a) ha sia massimo che minimo

(b) ha minimo ma non ha massimo

► (c) ha massimo ma non ha minimo

(d) non è limitata né superiormente né inferiormente

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sin x\,(1-e^{1/x})$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$\lim_{x\to0^+} f(x) = 0\cdot(1-e^{\frac{1}{0^+}}) = 0\cdot(1-e^{+\infty}) = 0\cdot(-\infty)$ indeterminata

Eseguiamo la sostituzione $\frac{1}{x}=t$, quindi se $x\to0^+ \Rightarrow t\to+\infty$.

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \sin\frac{1}{t}\,(1-e^{t}) = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(1-e^{t}) =$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1-e^{t}}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = -\infty$ per gerarchia di infiniti.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{limitata}\cdot(1-e^{\frac{1}{+\infty}}) = \text{limitata}\,(1-e^{0}) =$

$=\text{limitata}\cdot 0 = 0.$

Dal limite per $x\to0^+$ otteniamo che f non ha minimo.

Osserviamo ora che $(1-e^{1/x})<0 \quad \forall x>0$ e che

$\sin x$ cambia periodicamente segno, quindi esiste

sicuramente un punto $x_0>0$ t.c. $\sin(x_0)<0$ quindi

$f(x_0)>0$.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo

che f ha massimo.

2. La funzione $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\log\left(\cos x + x^3\sin\frac{1}{x}\right) & \text{se } x>0\\ -x^3-4x^2+4x & \text{se } x\le 0,\end{cases}$ in $x=0$

(a) ha un punto di cuspide

► (b) ha un punto angoloso

(c) è derivabile

(d) non è continua

Soluzione:

Se $x>0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}\log\left(\cos x + x^3 \sin\frac{1}{x}\right) =$

$$= \frac{1}{x}\log\left(1-\frac{x^2}{2}+x^3\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\log\left(1-\frac{x^2}{2}+\underbrace{o(x^2)}\right) = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)$$

perché $\lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\frac{1}{x}}{x^2} = 0$

Quindi $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{2}(1+o(1)) = 0$

e f è continua in $x=0$ perché $f(0) = -0^3 - 4\cdot 0^2 + 4\cdot 0 = 0$

(f è ovviamente continua a sinistra in $x=0$).

f è inoltre derivabile a sinistra in $x=0$ e risulta

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -3x^2 - 8x + 4 = 4.$$

Per calcolare $f'_+(0)$ usiamo il limite del rapporto incrementale

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-0}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = -\frac{1}{2}(1+o(1)) = -\frac{1}{2}$$

Dato che $f'_+(0) \neq f'_-(0)$, f ha un punto angoloso.

3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x \, dx =$

(a) 30 (b) $3\sqrt{3}-1$ ► (c) $1-\frac{\log 2}{2}$ (d) $-\frac{\log^3 6}{8} - \log^3 2$

Soluzione:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x \, dx .$$ Calcoliamo prima una primitiva

$$\int tg^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \cos x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow \sin x \, dx = -dt$. Otteniamo quindi

$$-\int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} dt = \log|t| + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + c =$$

$$= \log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$. Dal teorema di Torricelli abbiamo:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x \, dx = \left[\log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\log 2 + 2 + \frac{\log 2}{2} - 1$$

$$= 1 - \frac{\log 2}{2} .$$

4. $\lim_{x\to+\infty} x \int_0^{\sin\frac{1}{x+1}} e^{t^2+1}\,dt =$

(a) non esiste (b) $+\infty$ (c) 0 ► (d) e

Soluzione:

$$\lim_{x\to+\infty} x \int_0^{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} e^{t^2+1}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^{\sin\left(\frac{1}{x+1}\right)} e^{t^2+1}\,dt}{\frac{1}{x}}$$

e il limite è della forma $\frac{0}{0}$. Applichiamo de l'Hôspital e calcoliamo il limite del quoziente delle derivate

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sin^2\left(\frac{1}{x+1}\right)+1} \cdot \cos\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \left(\lim_{x\to\infty} e^{\sin^2(0)+1} \cdot \cos(0)\right) \cdot \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = e\cdot 1 = e.$$

5. $\int_0^e (\log x)^3\,dx$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) non esiste (d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^e (\log x)^3\, dx$$

Poniamo $f(x) = (\log x)^3$ e osserviamo che f è continua in $(0, e]$ e che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, basterà quindi esaminare la convergenza in un intorno destro di 0. Se consideriamo l'intervallo $(0,1)$ risulta $f(x) < 0$, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ (ma andrebbe bene anche $\frac{1}{x^\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$).

Risulta che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} x^{1/2} \log^3 x = 0 .$$

Dato che $\int_0^1 g(x)dx$ converge, allora anche $\int_0^1 f(x)dx$ converge

quindi $\int_0^e f(x)dx$ converge.

6. $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\log(\sqrt{x}+1) - \log(\sqrt{x}-1)}{x^{\frac{3}{4}}}\, dx$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_2^{+\infty} \frac{\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}-1)}{x^{3/4}}\,dx$$

Poniamo $f(x)=\dfrac{\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}-1)}{x^{3/4}}$ e osserviamo che

f è definita $\forall x\in[2,+\infty)$, dovremo quindi esaminare

solo l'andamento di f per $x\to+\infty$.

$$\log(\sqrt{x}+1)-\log(\sqrt{x}-1)=\log\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)=\log\left(\frac{\sqrt{x}-1+2}{\sqrt{x}-1}\right)=$$

$$=\log\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}-1}+o\left(\frac{2}{\sqrt{x}-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}-1}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \text{ per } x\to+\infty.$$

Quindi $f(x)=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}+o\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)x^{-3/4}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+o(1)\right)x^{-3/4}=$

$$=\frac{2}{x^{5/4}}(1+o(1)).$$

Poniamo $g(x)=\dfrac{1}{x^{5/4}}$, osserviamo che $f(x)>0$ $\forall x\in[2,+\infty)$

e che $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=2$. Dato che $\int_2^{+\infty} g(x)\,dx$ converge, dal

criterio del confronto asintotico, anche $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ converge.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n^n)^{1/n^2}=$

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) e^2 ▶ (d) 1

Soluzione:

$$a_n=(1+n^n)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\log(1+n^n)}$$

Osserviamo che

$$\log(1+n^n)=\log\left(n^n\left(\frac{1}{n^n}+1\right)\right)=n\log n+\log\left(1+\frac{1}{n^n}\right)=n\log n+o(1)$$

quindi

$$a_n=e^{\frac{1}{n^2}(n\log n+o(1))}=e^{\frac{\log n}{n}+o(1)}\to e^0=1.$$

8. Si consideri la successione $a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+7}{n}}$ definita per $n \geq 1$. Il minimo di $\{a_n\}$ è

(a) $\sqrt{2\sqrt{7}}$ (b) non esiste (c) $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$ ► (d) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

Soluzione:

$a_n = \sqrt{\dfrac{n^2+7}{n}}$

Poniamo $f(x) = \dfrac{x^2+7}{x}$ e troviamo il punto di minimo per f con $x > 0$.

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+7)}{x^2} = \dfrac{x^2-7}{x^2}$

$f'(x) > 0 \iff x^2 - 7 > 0 \iff |x| > \sqrt{7} \iff x > \sqrt{7}$ dato che $x > 0$.

Ne segue che f è decrescente in $(0, \sqrt{7}]$ e crescente in $[\sqrt{7}, +\infty)$, quindi la successione $b_n = \dfrac{n^2+7}{n}$ è decrescente se $1 \leq n \leq 2$ e crescente se $3 \leq n$. (basta osservare che $2 < \sqrt{7} < 3$).

Dato che la radice quadrata è una funzione crescente, otteniamo che anche (a_n) ha la stessa monotonia di (b_n).

Il minimo di (a_n) sarà quindi per $n = 2$ oppure per $n = 3$.

$a_2 = \sqrt{\dfrac{2^2+7}{2}} = \sqrt{\dfrac{11}{2}}$, $a_3 = \sqrt{\dfrac{9+7}{3}} = \sqrt{\dfrac{16}{3}}$

dato che $a_2 > a_3$ (infatti $a_2 = \sqrt{5+\frac{1}{2}}$, $a_3 = \sqrt{5+\frac{1}{3}}$)

il minimo di (a_n) vale $\sqrt{\dfrac{16}{3}} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-n)^5 \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

(a) diverge negativamente ► (b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente (d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = (-n)^5 \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} = (-1)^n n^5 \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

e osserviamo che a_n è a segni alterni. Proviamo la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^5} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5} = 1$ mentre $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \log\left(\cos\frac{1}{n}\right)} =$

$$= e^{n^2 \log\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \to e^{-1/2}$$

quindi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$.

Per il criterio della radice la serie converge assolutamente.

10.

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{4+\sin\frac{1}{n}}{n^2+3\sqrt{n}+\cos n}\right) n$$

(a) diverge negativamente (b) è indeterminata ► (c) diverge positivamente (d) converge assolutamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{4+\sin\frac{1}{n}}{n^2+3\sqrt{n}+\cos n}\right) n$$

Ponendo $a_n = \left(\frac{4+\sin\frac{1}{n}}{n^2+3\sqrt{n}+\cos n}\right) \cdot n$ otteniamo che $a_n > 0 \quad \forall n$.

Scegliamo $b_n = \frac{1}{n}$ e abbiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(4+\sin\frac{1}{n}\right) \frac{n^2}{n^2+3\sqrt{n}+\cos n} = 4.$$

Poiché $\sum_{n\geq 1} b_n = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico, $\sum a_n$ diverge positivamente.

11. La funzione $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(b) non è continua ed ha una sola delle derivate parziali

(c) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

► (d) ha una delle derivate parziali ed è continua

Soluzione:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Vediamo se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{\sqrt{h^2+0}}-0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}=\begin{cases}1 \text{ se } h\to 0^+\\ -1 \text{ se } h\to 0^-\end{cases}$$

quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Proviamo con $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Vediamo ora la continuità utilizzando le coordinate polari.

$$g(\rho,\theta)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta}}=\frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho}=\rho\cos^2\theta$$

quindi $0\leq|g(\rho,\theta)|\leq\rho$ e $\lim_{\rho\to 0}g(\rho,\theta)=0$ indipendentemente da θ.

La funzione è quindi continua in $(0,0)$ e ha una sola delle derivate parziali.

12. I punti stazionari della funzione $f(x,y)=x^6+3e^{(y-2)^3}+2$ sono

(a) una parabola ► (b) un punto solo (c) 5 punti (d) nessuno

Soluzione:

$$f(x,y) = x^6 + 3e^{(y-2)^3} + 2$$

$$f_x = 6x^5$$

$$f_y = 3 \cdot 3(y-2)^2 e^{(y-2)^3}$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 6x^5 = 0 \\ 9(y-2)^2 e^{(y-2)^3} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

quindi f ha un solo punto stazionario.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 654952 14 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	b
2	d
3	d
4	a
5	c
6	a
7	a
8	a
9	b
10	c
11	d
12	d

1. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$

(a) ha sia massimo che minimo

► (b) ha massimo ma non ha minimo

(c) non è limitata né superiormente né inferiormente

(d) ha minimo ma non ha massimo

Soluzione:

$f : (0,+\infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin x \,(1-e^{1/x})$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \cdot (1-e^{\frac{1}{0^+}}) = 0 \cdot (1-e^{+\infty}) = 0 \cdot (-\infty)$ indeterminata

Eseguiamo la sostituzione $\frac{1}{x} = t$, quindi se $x \to 0^+ \Rightarrow t \to +\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \sin\frac{1}{t}\,(1-e^t) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t} + o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(1-e^t) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1-e^t}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = -\infty$$ per gerarchia di infiniti.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{limitata} \cdot (1-e^{\frac{1}{+\infty}}) = \text{limitata}\,(1-e^0) =$$

$= \text{limitata} \cdot 0 = 0$.

Dal limite per $x \to 0^+$ otteniamo che f non ha minimo.

Osserviamo ora che $(1-e^{1/x}) < 0 \;\; \forall x > 0$ e che $\sin x$ cambia periodicamente segno, quindi esiste sicuramente un punto $x_0 > 0$ t.c. $\sin(x_0) < 0$ quindi $f(x_0) > 0$.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che f ha massimo.

2. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ è

(a) prolungabile per continuità in $x = 0$

(b) non derivabile

(c) non limitata

► (d) di classe C^2

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

La funzione è composizione delle funzioni $g(x)=\frac{1}{x}$ e $h(t)=\sin t$ entrambe derivabili infinite volte, pertanto f è derivabile infinite volte, quindi, in particolare, è di classe C^2.
Anche se non è necessario, calcoliamo la derivata seconda:

$$f'(x)=\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f''(x)=\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(\frac{2}{x^3}\right) .$$

3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\, dx =$

(a) $-\dfrac{\log^3 6}{8}-\log^3 2$ (b) $3\sqrt{3}-1$ (c) 30 ► (d) $1-\dfrac{\log 2}{2}$

Soluzione:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x \, dx .$$ Calcoliamo prima una primitiva

$$\int tg^3 x \, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x \, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \cos x \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow \sin x \, dx = - dt$. Otteniamo quindi

$$-\int \frac{1-t^2}{t^3} dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} dt = \log|t| + \frac{1}{2} \frac{1}{t^2} + c =$$

$= \log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + c$. Dal teorema di Torricelli abbiamo:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x \, dx = \left[\log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\log 2 + 2 + \frac{\log 2}{2} - 1$$

$$= 1 - \frac{\log 2}{2} .$$

4. La funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $F(x) = \displaystyle\int_1^{2x+1} \frac{t^2+t}{\log(2+t^2)}\, dt$

► (a) ha un punto di massimo locale per $x = -1$ e uno di minimo locale per $x = -\dfrac{1}{2}$

(b) ha un punto di minimo locale per $x = -\dfrac{1}{2}$ e nessun punto di massimo locale

(c) non ha né massimi né minimi locali

(d) ha un punto di massimo locale per $x = -1$ e uno di minimo locale per $x = 0$

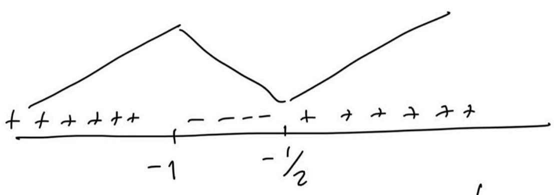
Soluzione:

$$F(x) = \int_1^{2x+1} \frac{t^2+t}{\log(2+t^2)}\, dt$$

F è derivabile e $F'(x) = \dfrac{(2x+1)^2 + 2x+1}{\log\left(2+(2x+1)^2\right)} \cdot 2$. Vediamo il segno di F':

$F'(x) > 0 \iff (2x+1)^2 + 2x+1 > 0 \iff (2x+1)(2x+2) > 0$

$\iff x < -1$ oppure $x > -\frac{1}{2}$



quindi $x = -1$ è punto di massimo locale per F mentre $x = -\frac{1}{2}$ è di minimo locale.

5. $\displaystyle\int_0^e (\log x)^3\, dx$

(a) non esiste

(b) diverge negativamente

► (c) converge

(d) diverge positivamente

Soluzione:

$$\int_0^e (\log x)^3\,dx$$

Poniamo $f(x) = (\log x)^3$ e osserviamo che f è continua in $(0,e]$ e che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, basterà quindi esaminare la convergenza in un intorno destro di 0. Se consideriamo l'intervallo $(0,1)$ risulta $f(x)<0$, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ (ma andrebbe bene anche $\frac{1}{x^\alpha}$ con $0<\alpha<1$).

Risulta che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x^{1/2} \log^3 x = 0 .$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx$ converge, allora anche $\int_0^1 f(x)\,dx$ converge

quindi $\int_0^e f(x)\,dx$ converge.

6. L'integrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x^2-x)}{x\log(1+x)}\,dx$

► (a) diverge negativamente (b) diverge positivamente (c) converge (d) non esiste

Soluzione:

$$\int_0^1 \frac{\sin(x^2-x)}{x\log(1+x)}\,dx \qquad \text{Sia} \quad f(x)=\frac{\sin(x^2-x)}{x\log(1+x)}.$$

La funzione f non è definita per $x=0$ ed è continua in $(0,1]$, basterà quindi vedere l'andamento di f per $x\to 0^+$:

$$f(x)=\frac{x^2-x+o((x^2-x)^2)}{x\,(x+o(x))}=\frac{x-1+o(x(x-1)^2)}{x+o(x)}=\frac{x-1+o(x)}{x(1+o(1))}=$$

$$=\frac{x-1+o(x)}{x}\,\frac{1}{1+o(1)}=\left(1-\frac{1}{x}+o(1)\right)\frac{1}{1+o(1)}$$

Da questa analisi segue che $f(x)<0$ in un intorno destro di 0 e che ha un andamento asintotico a $-\frac{1}{x}$. Scegliamo quindi $g(x)=-\frac{1}{x}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{1}{x}+o(1)\right)\frac{-x}{1+o(1)}=1.$$

Dato che $\int_0^1 g(x)\,dx=-\infty$, dal criterio del confronto asintotico abbiamo che $\int_0^1 f(x)\,dx$ diverge negativamente.

7. $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+n^n)^{1/n^2}=$

► (a) 1 (b) 0 (c) e^2 (d) $+\infty$

Soluzione:

$$a_n=(1+n^n)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\log(1+n^n)}$$

Osserviamo che

$$\log(1+n^n)=\log\left(n^n\left(\frac{1}{n^n}+1\right)\right)=n\log n+\log\left(1+\frac{1}{n^n}\right)=n\log n+o(1)$$

quindi

$$a_n=e^{\frac{1}{n^2}(n\log n+o(1))}=e^{\frac{\log n}{n}+o(1)}\longrightarrow e^0=1.$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\log(n+n^2)\log(3n+1)}{\log(e^{(n^2)}+1)\log(n^{\log n})}=$

► (a) 2 (b) $+\infty$ (c) 0 (d) 3

Soluzione:

$$\frac{n^2 \log(n+n^2)\log(3n+1)}{\log(e^{n^2}+1)\log(n^{\log n})} = \frac{n^2 \log\left[n^2\left(\frac{1}{n}+1\right)\right]\log\left(n\left(3+\frac{1}{n}\right)\right)}{\log\left[e^{n^2}\left(1+e^{-n^2}\right)\right]\log^2 n} =$$

$$= \frac{n^2\left[\log(n^2)+\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]\left[\log n+\log\left(3+\frac{1}{n}\right)\right]}{\left[\log\left(e^{n^2}\right)+\log\left(1+e^{-n^2}\right)\right]\log^2 n} =$$

$$= \frac{n^2\left(2\log n+o(1)\right)\log n\left(1+o(1)\right)}{\left(n^2+o(1)\right)\log^2 n} = \frac{2n^2\log^2 n\left(1+o(1)\right)}{n^2\log^2 n\left(1+o(1)\right)} \to 2$$

9. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq1}(-n)^5\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

(a) diverge negativamente

► (b) converge assolutamente

(c) converge ma non converge assolutamente

(d) diverge positivamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = (-n)^5\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3} = (-1)^n n^5 \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

e osserviamo che a_n è a segni alterni. Proviamo la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^5}\cdot\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^5} = 1$ mentre $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\log\left(\cos\frac{1}{n}\right)} =$

$$= e^{n^2\log\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2}+o(1)} \to e^{-1/2}$$

quindi $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = 1\cdot e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1.$

Per il criterio della radice la serie converge assolutamente.

10. La serie $\displaystyle\sum_{n\geq1} n\sin\frac{1}{n^2}$

(a) converge assolutamente

(b) converge semplicemente ma non assolutamente

► (c) diverge positivamente

(d) è indeterminata

Soluzione:

$\sum_{n\geq 1} n \sin \frac{1}{n^2}$. Sia $a_n = n \sin \frac{1}{n^2}$. Osserviamo che $a_n > 0$ $\forall n \geq 1$.

Risulta, per $n \to +\infty$, $a_n = n\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{1}{n}\left(1 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$, quindi,

scegliendo $b_n = \frac{1}{n}$ otteniamo

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Dato che $\sum_n b_n = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico,

$\sum_n a_n$ diverge positivamente.

11. La funzione $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

(a) non è continua ed ha una sola delle derivate parziali

(b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(c) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

► (d) ha una delle derivate parziali ed è continua

Soluzione:

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Vediamo se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{\sqrt{h^2+0}}-0\right)=\lim_{h\to 0}\frac{h}{|h|}=\begin{cases}1 & \text{se } h\to 0^+\\ -1 & \text{se } h\to 0^-\end{cases}$$

quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Passiamo con $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0.$$

Vediamo ora la continuità utilizzando le coordinate polari.

$$g(\rho,\vartheta)=f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)=\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}}=\frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho}=\rho\cos^2\vartheta$$

quindi $0\leq|g(\rho,\vartheta)|\leq\rho$ e $\lim_{\rho\to 0}g(\rho,\vartheta)=0$ indipendentemente da ϑ.

La funzione è quindi continua in $(0,0)$ e ha una sola delle derivate parziali.

12. I punti stazionari della funzione $f(x,y)=e^{x+y}(y^2-xy)$ sono

(a) infiniti (b) uno (c) nessuno ► (d) due

Soluzione:

$$f(x,y) = e^{x+y}(y^2 - xy)$$

$$f_x = e^{x+y}(y^2 - xy) + e^{x+y}(-y) = e^{x+y}(y^2 - xy - y) = e^{x+y}\,y\,(y - x - 1)$$

$$f_y = e^{x+y}(y^2 - xy) + e^{x+y}(2y - x) = e^{x+y}(y^2 - xy + 2y - x)$$

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \cancel{e^{x+y}}\, y(y - x - 1) = 0 \\ \cancel{e^{x+y}}(y^2 - xy + 2y - x) = 0 \end{cases}$$

dalla prima equazione abbiamo $y = 0$ oppure $y - x - 1 = 0$

se $y = 0$, dalla seconda otteniamo $-x = 0 \Rightarrow x = 0$

quindi il punto stazionario $(0,0)$.

Se $y - x - 1 = 0 \Rightarrow x = y - 1$ e dalla seconda

$$y^2 - (y-1)y + 2y - (y-1) = 0 \iff \cancel{y^2} \cancel{-y^2} \cancel{+y} + 2y \cancel{-y} + 1 = 0 \iff y = -\frac{1}{2}$$

quindi $x = y - 1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$ e il punto stazionario è $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

La funzione ha 2 punti stazionari.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	codice 954217 14 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	c
3	b
4	b
5	d
6	a
7	d
8	c
9	d
10	c
11	a
12	a

1. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$

(a) non è limitata né superiormente né inferiormente
(b) ha minimo ma non ha massimo
(c) ha sia massimo che minimo
► (d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\sin x\,(1-e^{1/x})$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0\cdot(1-e^{\frac{1}{0^+}}) = 0\cdot(1-e^{+\infty}) = 0\cdot(-\infty)$ indeterminata

Eseguiamo la sostituzione $\frac{1}{x}=t$, quindi se $x\to 0^+ \Rightarrow t\to+\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{t\to+\infty} \sin\frac{1}{t}\,(1-e^{t}) = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(1-e^{t}) =$

$= \lim_{t\to+\infty} \frac{1-e^{t}}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right) = -\infty$ per gerarchia di infiniti.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \text{limitata}\cdot(1-e^{\frac{1}{+\infty}}) = \text{limitata}\,(1-e^{0}) =$

$= \text{limitata}\cdot 0 = 0$.

Dal limite per $x\to 0^+$ otteniamo che f non ha minimo.

Osserviamo ora che $(1-e^{1/x})<0$ $\forall x>0$ e che $\sin x$ cambia periodicamente segno, quindi esiste sicuramente un punto $x_0>0$ t.c. $\sin(x_0)<0$ quindi $f(x_0)>0$.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che f ha massimo.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{5x^2+12x^3+3|x|^{\frac{7}{2}}}{e^{2x^2}-e^{-2x^2}} =$

(a) $+\infty$ $\quad$ (b) non esiste $\quad$ ► (c) $\frac{5}{4}$ $\quad$ (d) 0

Soluzione:

Per $x \to 0^+$, utilizzando gli sviluppi di Taylor, abbiamo:

$$\frac{5x^2+12x^3+3|x|^{7/2}}{e^{2x^2}-e^{-2x^2}} = \frac{x^2(5+12x+3x^{3/2})}{\cancel{1}+2x^2+o(x^2)-(\cancel{1}-2x^2+o(x^2))} =$$

$$= \frac{x^2(5+o(x))}{4x^2+o(x^2)} = \frac{5+o(x)}{4+o(1)} \to \frac{5}{4}.$$

3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\, dx =$

(a) $-\dfrac{\log^3 6}{8} - \log^3 2$ ▶ (b) $1 - \dfrac{\log 2}{2}$ (c) 30 (d) $3\sqrt{3}-1$

Soluzione:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x\, dx.$$ Calcoliamo prima una primitiva

$$\int tg^3 x\, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x\, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \cos x \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow \sin x\, dx = -dt$. Otteniamo quindi

$$-\int \frac{1-t^2}{t^3}\, dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\, dt = \log|t| + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + c =$$

$$= \log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x} + c$$. Dal teorema di Torricelli abbiamo:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x\, dx = \left[\log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \log\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\log 2 + 2 + \frac{\log 2}{2} - 1$$

$$= 1 - \frac{\log 2}{2}.$$

4. $\int x \log x \, dx =$

(a) $\frac{1}{2}x^2 \log x + c$ ► (b) $\frac{x^2(2\log x - 1)}{4} + c$ (c) $x \log x - \frac{1}{2}(\log x)^2 + c$ (d) $\frac{x^2 \log x}{2} - x + c$

Soluzione:

$$\int x \log x \, dx$$

per parti integrando x e derivando $\log x$

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^{\cancel{2}}}{2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + c = \frac{2x^2 \log x - x^2}{4} + c = \frac{x^2(2\log x - 1)}{4} + c$$

5. $\int_0^e (\log x)^3 \, dx$

(a) diverge negativamente (b) non esiste (c) diverge positivamente ► (d) converge

Soluzione:

$$\int_0^e (\log x)^3 \, dx$$

Poniamo $f(x) = (\log x)^3$ e osserviamo che f è continua in $(0, e]$ e che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$, basterà quindi esaminare la convergenza in un intorno destro di 0. Se consideriamo l'intervallo $(0,1)$ risulta $f(x) < 0$, possiamo applicare il criterio del confronto asintotico con $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ (ma andrebbe bene anche $\frac{1}{x^\alpha}$ con $0 < \alpha < 1$).

Risulta che

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0^+} x^{1/2} \log^3 x = 0 .$$

Dato che $\int_0^1 g(x) dx$ converge, allora anche $\int_0^1 f(x) dx$ converge

quindi $\int_0^e f(x) dx$ converge.

6. $\int_0^{+\infty} \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right) \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$

► (a) converge (b) diverge negativamente (c) diverge positivamente (d) non esiste

Soluzione:

Per $x \to 0$

$$e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e^{\frac{x-1}{x+1}} - e^{-1} = e^{-1}\left(e^{\frac{x-1}{x+1}+1} - 1\right) = e^{-1}\left(e^{\frac{x\cancel{-1}+x\cancel{+1}}{x+1}} - 1\right)$$

$$= e^{-1}\left(e^{\frac{2x}{x+1}} - 1\right) = e^{-1}\left(\cancel{1}+\frac{2x}{x+1} + o\left(\frac{2x}{x+1}\right) \cancel{-1}\right) =$$

$$= xe^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right)$$

Scegliamo $g(x) = \frac{1}{x^{1/2}}$ e otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \cancel{x}e^{-1}\left(\frac{2}{x+1} + o\left(\frac{2}{x+1}\right)\right) \cdot \frac{1}{\cancel{x^{3/2}}} \cdot \cancel{x^{1/2}} = e^{-1} \cdot 2$$

Dato che $\int_0^1 g(x)dx$ converge, per il criterio del confronto asintotico, $\int_0^1 f(x)dx$ converge, dove $f(x) = \left(e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e}\right) \cdot \frac{1}{x^{3/2}}$

Per $x \to +\infty$ $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{x-1}{x+1}} - \frac{1}{e} = e - \frac{1}{e}$

quindi scegliamo $h(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$ per ottenere

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = e - \frac{1}{e}$. Dato che $\int_1^{+\infty} h(x)dx$ converge, dal criterio del confronto asintotico, anche $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge.

Ne segue che $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

7. $\lim_{n\to+\infty} (1+n^n)^{1/n^2} =$

(a) $+\infty$ (b) 0 (c) e^2 ▶ (d) 1

Soluzione:

$$a_n = (1+n^n)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\log(1+n^n)}$$

Osserviamo che

$$\log(1+n^n) = \log\left(n^n\left(\frac{1}{n^n}+1\right)\right) = n\log n + \log\left(1+\frac{1}{n^n}\right) = n\log n + o(1)$$

quindi

$$a_n = e^{\frac{1}{n^2}(n\log n + o(1))} = e^{\frac{\log n}{n} + o(1)} \longrightarrow e^0 = 1.$$

8. $\lim_{n\to\infty} (1+n^2)^{\frac{1}{n^2}} =$

(a) $+\infty$ (b) e^2 ▶ (c) 1 (d) $\frac{1}{e}$

Soluzione:

$$a_n = (1+n^2)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\log(1+n^2)}$$

e $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n^2)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log\left(n^2\left(\frac{1}{n^2}+1\right)\right)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log n + \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2} = 0$

per gerarchia di infiniti.

Quindi $\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 = 1.$

9. La serie $\sum_{n\geq 1} (-n)^5 \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{(n^3)}$

(a) diverge positivamente (b) diverge negativamente

(c) converge ma non converge assolutamente ▶ (d) converge assolutamente

Soluzione:

Poniamo $a_n = (-n)^5 \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^3} = (-1)^n n^5 \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$

e osserviamo che a_n è a segni alterni. Proviamo la convergenza assoluta utilizzando il criterio della radice.

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^5} \cdot \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5} = 1$ mentre $\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \log\left(\cos\frac{1}{n}\right)} =$

$$= e^{n^2 \log\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)} = e^{n^2\left(-\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \to e^{-1/2}$$

quindi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1$.

Per il criterio della radice la serie converge assolutamente.

10. La serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$

(a) converge ma non converge assolutamente

(b) converge assolutamente

► (c) diverge positivamente

(d) diverge negativamente

Soluzione:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}}.$$ Sia $a_n = \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}}$.

Osserviamo che $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ e scegliamo $b_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{n^{3/2}} \cdot n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + 1 = 1.$$

Dato che $\sum_n b_n = +\infty$, dal criterio del confronto asintotico, segue che $\sum_n a_n$ diverge positivamente.

11. La funzione $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$ nel punto (0,0)

► (a) ha una delle derivate parziali ed è continua

(b) è continua ma non ha nessuna delle derivate parziali

(c) ha entrambe le derivate parziali ma non è continua

(d) non è continua ed ha una sola delle derivate parziali

Soluzione:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vediamo se esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{\sqrt{h^2+0}} - 0\right) = \lim_{h\to 0} \frac{h}{|h|} = \begin{cases} 1 & \text{se } h\to 0^+ \\ -1 & \text{se } h \to 0^- \end{cases}$$

quindi non esiste $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Proviamo con $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Vediamo ora la continuità utilizzando le coordinate polari.

$$g(\rho,\vartheta) = f(\rho\cos\vartheta, \rho\sin\vartheta) = \frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\vartheta+\rho^2\sin^2\vartheta}} = \frac{\rho^2\cos^2\vartheta}{\rho} = \rho\cos^2\vartheta$$

quindi $0 \leq |g(\rho,\vartheta)| \leq \rho$ e $\lim_{\rho\to 0} g(\rho,\vartheta) = 0$ indipendentemente da ϑ.

La funzione è quindi continua in $(0,0)$ e ha una sola delle derivate parziali.

12. La funzione $f(x,y) = 3e^{(x-2)^2} + 5y^6$ ha

► (a) un punto di minimo locale e nessun punto di massimo locale

(b) un punto di sella, un punto di massimo locale e un punto di minimo locale

(c) un punto di sella e nessun punto di massimo o di minimo locale

(d) un punto di massimo locale e due punti di minimo locale

Soluzione:

$$f(x,y) = 3e^{(x-2)^2} + 5y^6$$

$f_x = 3e^{(x-2)^2} 2(x-2)$ $\qquad f_y = 30y^5$. Cerchiamo i punti stazionari:

$$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} 6e^{(x-2)^2}(x-2) = 0 \\ 30y^5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$P = (2,0)$ è l'unico punto stazionario.

$$f_{xx} = 6\left(e^{(x-2)^2} 2(x-2)^2 + e^{(x-2)^2}\right) = 6e^{(x-2)^2}\left(2(x-2)^2+1\right)$$

$$f_{xy} = 0$$

$$f_{yy} = 150y^4$$

$f_{xx}(P) = 6 \cdot e^0 (2 \cdot 0 + 1) = 6$, $f_{xy}(P) = 0$, $f_{yy}(P) = 0$

$Hf(P) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det(Hf(P)) = 0$, $f_{xx}(P) > 0$, quindi

$Hf(P)$ è semidefinita positiva, ne segue che P non può essere né punto di massimo locale né punto di sella. L'unica possibile risposta corretta è quindi che P sia di minimo locale.

Alternativamente possiamo osservare che

$f(P) = 3e^0 + 5 \cdot 0 = 3$ e che, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$f(x,y) \geq 3$, dato che $e^{(x-2)^2} \geq e^0 = 1$ e $y^6 \geq 0$,

quindi P è punto di minimo assoluto e, in particolare, di minimo locale.

Corso di Laurea in Informatica	Analisi Matematica	vecchio regolamento 14 giugno 2023

(Cognome) (Nome) (Numero di matricola)

1	d
2	a
3	a
4	d
5	a
6	c
7	b
8	c
9	b
10	d
11	c
12	a

1. La funzione $f : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \sin x \left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right)$

(a) ha sia massimo che minimo

(b) non è limitata né superiormente né inferiormente

(c) ha minimo ma non ha massimo

► (d) ha massimo ma non ha minimo

Soluzione:

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}\qquad f(x)=\sin x\,(1-e^{1/x})$.

La funzione è continua in tutto il suo dominio.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=0\cdot(1-e^{\frac{1}{0^+}})=0\cdot(1-e^{+\infty})=0\cdot(-\infty)\ \text{indeterminata}$$

Eseguiamo la sostituzione $\frac{1}{x}=t$, quindi se $x\to0^+\Rightarrow t\to+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{t\to+\infty}\sin\frac{1}{t}\,(1-e^t)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{t}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right)(1-e^t)=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^t}{t}\left(1+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)=-\infty\quad\text{per gerarchia di infiniti.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\text{limitata}\cdot(1-e^{\frac{1}{+\infty}})=\text{limitata}\,(1-e^0)=$$

$$=\text{limitata}\cdot0=0.$$

Dal limite per $x\to0^+$ otteniamo che f non ha minimo.

Osserviamo ora che $(1-e^{1/x})<0\ \ \forall x>0$ e che $\sin x$ cambia periodicamente segno, quindi esiste sicuramente un punto $x_0>0$ t.c. $\sin(x_0)<0$ quindi $f(x_0)>0$.

Dal teorema di Weierstrass generalizzato otteniamo che f ha massimo.

2. L'insieme $\{x\in\mathbb{R}:|\cos x|\geq1\}$

► (a) non è limitato

(b) è limitato

(c) è limitato superiormente ma non inferiormente

(d) è limitato inferiormente ma non superiormente

Soluzione:

Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : |\cos x| \geq 1\}$.

Osserviamo che $|\cos x| \geq 1 \iff |\cos x| = 1 \iff \cos x = \pm 1$

$\iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Quindi $A = \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi\}$ e l'insieme A non è né superiormente né inferiormente limitato.

3. La funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = (x-1)\arctan(x+1)$

► (a) ha minimo

(b) è debolmente crescente

(c) è limitata superiormente

(d) è strettamente decrescente

Soluzione:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\operatorname{arctg}(x+1)$.

La funzione f è continua e

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = (-\infty)\operatorname{arctg}(-\infty) = -\infty\left(-\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty)\operatorname{arctg}(+\infty) = (+\infty)\frac{\pi}{2} = +\infty$.

Applicando il teorema di Weierstrass generalizzato, otteniamo che f ha minimo.

4. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\, dx =$

(a) $-\dfrac{\log^3 6}{8} - \log^3 2$ (b) 30 (c) $3\sqrt{3}-1$ ► (d) $1-\dfrac{\log 2}{2}$

Soluzione:

$\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x\, dx$. Calcoliamo prima una primitiva

$$\int tg^3 x\, dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x} \sin x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} \sin x\, dx$$

Eseguiamo la sostituzione $t = \cos x \Rightarrow \dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

$\Rightarrow \sin x\, dx = -dt$. Otteniamo quindi

$$-\int \frac{1-t^2}{t^3}\, dt = \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\, dt = \log|t| + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2} + c =$$

$= \log|\cos x| + \dfrac{1}{2\cos^2 x} + c$. Dal teorema di Torricelli abbiamo:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} tg^3 x\, dx = \left[\log|\cos x| + \frac{1}{2\cos^2 x}\right]_{\pi/4}^{\pi/3} =$$

$$= \log\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = -\log 2 + 2 + \frac{\log 2}{2} - 1$$

$= 1 - \dfrac{\log 2}{2}$.

5. $\displaystyle\int_{0}^{\pi/6} \tan(2x)\, dx =$

► (a) $\dfrac{\log 2}{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\dfrac{1}{2}$

Soluzione:

$$\int \operatorname{tg}(2x)\,dx = \int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,dx$$

sostituzione $\cos(2x) = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = -2\sin(2x)$

$\Rightarrow \sin(2x)\,dx = -\frac{dt}{2}$

$$\int \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\log|t| + c = -\frac{1}{2}\log|\cos(2x)| + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/6} \operatorname{tg}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\Big[\log|\cos(2x)|\Big]_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2}\left(\log\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \log(\cos 0)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\log\frac{1}{2} - \log 1\right) = -\frac{1}{2}(-\log 2 - 0) = \frac{\log 2}{2}.$$

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos(2x)\,dx =$

(a) $\frac{\pi}{4} - 1$ (b) 0 ► (c) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$ (d) $-\frac{\pi}{2} - 1$

Soluzione:

Calcoliamo prima una primitiva integrando per parti, derivando x e integrando $\cos(2x)$:

$$\int x\cos(2x)\,dx = x\,\frac{\sin(2x)}{2} - \int 1\cdot\frac{\sin(2x)}{2}\,dx = \frac{x\sin(2x)}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(2x)}{2}\right) + c =$$

$$= \frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} x\cos(2x)\,dx = \left[\frac{x\sin(2x)}{2} + \frac{\cos(2x)}{4}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$- \frac{0\sin(0)}{2} - \frac{\cos 0}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\cdot 0 - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$$

7. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1+n^n)^{1/n^2} =$

(a) e^2 ► (b) 1 (c) $+\infty$ (d) 0

Soluzione:

$$a_n = (1+n^n)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{1}{n^2}\log(1+n^n)}$$

Osserviamo che

$$\log(1+n^n) = \log\left(n^n\left(\frac{1}{n^n}+1\right)\right) = n\log n + \log\left(1+\frac{1}{n^n}\right) = n\log n + o(1)$$

quindi

$$a_n = e^{\frac{1}{n^2}(n\log n + o(1))} = e^{\frac{\log n}{n} + o(1)} \longrightarrow e^0 = 1.$$

8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\cos(n^3)-\log(1+n^4)}{n^3+2(-1)^n} =$

(a) $\dfrac{1}{2}$ (b) $-\infty$ ► (c) 0 (d) non esiste

Soluzione:

$$\frac{1-\cos(n^3)-\log(1+n^4)}{n^3+2(-1)^n} = \frac{\log(1+n^4)\left(\frac{1-\cos(n^3)}{\log(1+n^4)}-1\right)}{n^3+2(-1)^n} =$$

$$= \frac{\log\left(n^4\left(\frac{1}{n^4}+1\right)\right)(o(1)-1)}{n^3\left(1+\frac{2(-1)^n}{n^3}\right)} = \frac{\left(4\log n + \log\left(1+\frac{1}{n^4}\right)\right)(o(1)-1)}{n^3(1+o(1))} =$$

$$= \frac{4\log n\,(1+o(1))(-1+o(1))}{n^3(1+o(1))} \to 0 \quad \text{per gerarchia di infiniti.}$$

9. La successione $a_n = \dfrac{1}{\log(n^3)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}$ definita per $n \geq 2$

(a) non è limitata inferiormente ► (b) ha minimo

(c) converge (d) è definitivamente debolmente decrescente

Soluzione:

$$a_n = \frac{1}{\log(n^3)\sin\frac{1}{n}} = \frac{1}{3\log n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \frac{1}{3\log n\,\frac{1}{n}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} =$$

$$= \frac{n}{3\log n\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \longrightarrow +\infty$$ per gerarchia di infiniti.

Applicando la versione per le successioni del teorema di Weierstrass generalizzato, otteniamo che (a_n) ha minimo.

10. Se $y(x)$ è la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 20y = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = -e^{\frac{\pi}{2}} \\ y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2e^{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$ allora $y(\frac{\pi}{2}) =$

(a) $4e$ (b) $8e^{\frac{\pi}{2}} - 20e^{-\frac{\pi}{2}}$ (c) $-2e^{\pi}$ ► (d) e^{π}

Soluzione:

Risolviamo l'equazione differenziale $y'' - 4y' + 20y = 0$.

L'equazione caratteristica $\lambda^2 - 4\lambda + 20$ ha radici

$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-20} = 2 \pm 4i$. La soluzione fondamentale è

$y(x) = e^{2x}(c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x))$ e la sua derivata è

$y'(x) = 2e^{2x}(c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x)) + e^{2x}(-4c_1\sin(4x) + 4c_2\cos(4x))$

quindi

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}(c_1\cos(\pi) + \cancel{c_2\sin(\pi)}) = -c_1 e^{\pi/2}$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\pi/2}(c_1\cos(\pi) + \cancel{c_2\sin(\pi)}) + e^{\pi/2}(-\cancel{4c_1\sin(\pi)} + 4c_2\cos(\pi)) =$$

$$= -2c_1 e^{\pi/2} - 4c_2 e^{\pi/2}.$$

Troviamo c_1 e c_2 imponendo le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} -c_1 e^{\pi/2} = -e^{\pi/2} \\ -2c_1 e^{\pi/2} - 4c_2 e^{\pi/2} = -2e^{\pi/2} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ \cancel{-2e^{\pi/2}} - 4c_2 e^{\pi/2} = \cancel{-2e^{\pi/2}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \end{cases}.$$ La soluzione del problema di Cauchy è

$$y = e^{2x}(c_1\cos(4x) + c_2\sin(4x)) = e^{2x}\cos(4x).$$

Quindi $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi}\cos(2\pi) = e^{\pi}$.

11. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y\log y \\ y(2) = e. \end{cases}$ Calcolare $y(3)$.

(a) $e^{(e^{3-e}\log 2)}$ (b) $e^{(e^3)}$ ► (c) e^e (d) $e^{\sqrt{2}}$

Soluzione:

$$\begin{cases} y' = y\log y \\ y(2) = e \end{cases}$$ L'equazione $y' = y\log y$ è a variabili separabili.

$$\frac{dy}{dx} = y\log y \Rightarrow \int \frac{dy}{y\log y} = \int dx + c \qquad y \neq 0,\ \log y \neq 0\ (y \neq 1)$$

Integriamo $\int \frac{dy}{y\log y}$ con la sostituzione

$\log y = t$, $\frac{dt}{dy} = \frac{1}{y}$ $\frac{dy}{y} = dt$. Quindi:

$$\int \frac{dy}{y\log y} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + c = \log|\log y| + c$$

Dalla condizione iniziale $y(2) = e$ e dalle condizioni da imporre su y, cioè $y \neq 0$ e $y \neq 1$, otteniamo $y > 1$ (dato che $y(2) = e > 1$)

Quindi $\log y > 0$, allora possiamo eliminare il valore assoluto:

$$\int \frac{dy}{y\log y} = \log(\log y) + c.$$

$$\int dx = x + k$$

$\Rightarrow$ otteniamo $\log(\log y) = x + c$ (possiamo usare una sola costante)

Dalla condizione $y(2) = e$ otteniamo

$$\log(\log e) = 2 + c \iff \log 1 = 2 + c \iff 0 = 2 + c \iff c = -2.$$

Quindi $\log(\log y) = x - 2 \iff \log y = e^{x-2} \iff y = e^{(e^{x-2})}$

e $y(3) = e^e$.

12. Sia $y(x)$ la soluzione del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(1) = 3. \end{cases}$ Calcolare $y(3)$

► (a) $3e^8$ (b) $e^{\frac{9}{2}}$ (c) $3e^{\frac{17}{2}}$ (d) 1

Soluzione:

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

L'equazione differenziale è lineare del tipo

$y' = a(x)y + b(x)$ con $a(x) = 2x$, $b(x) = 0$.

Applichiamo la formula risolutiva $y(x) = e^{A(x)}\left(\int e^{-A(x)} b(x) + c\right)$

dove $A(x)$ è una primitiva qualsiasi di $a(x)$.

$A(x) = \int 2x\,dx = x^2 + c = x^2$ scegliendo $c = 0$.

$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx = \int e^{-x^2} \cdot 0\,dx = 0 + c = 0$ di nuovo scegliendo $c = 0$

Allora

$y(x) = e^{x^2} \cdot c$. Dato che $y(1) = 3$ otteniamo

$3 = e \cdot c \Rightarrow c = \frac{3}{e}$ quindi

$y(x) = \frac{3}{e} e^{x^2} = 3e^{x^2 - 1} \Rightarrow y(3) = 3e^8$.